Licence 1 - Physique générale

HLPH102 Gr. F5

Correction des exercices de vacances

1 Exercice 3B-5 : Desintégration du Polonium ^{210}Po

a. Le temps de demi-vie est le temps au bout duquel la moitié de l'échantillon s'est désintégré.

b. L'équation différentielle régissant l'évolution temporelle du nombre d'atomes de Polonium 210 est

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda N(t)$$

La solution de cette équation est données par

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)$$

où N_0 représenter le nombre d'atome initial.

c. Commençons par calculer la masse $m_N(t)$ de $N(t)$ atomes de polonium au temps t. Nous savons qu'un seul atome de Polonium contient 210 nucléons, ainsi, si l'on note m_n la masse d'un nucléon et m_1 la masse d'un atome il vient

$$m_1 = 210 m_n$$

et la masse $m_N(t)$ se déduit simplement par

$$m_N(t) = N(t) m_1 = 210 m_n N(t)\,.$$

Remarquons maintenant qu'en divisant des deux côtés par $210m_n$ cette relation nous dit que

$$\boxed{N(t) = \frac{m_N(t)}{210 m_n}}\,.$$

En utilisant cette relation dans la solution de l'equation différentielle sur le nombre $N(t)$ de la question b. nous pouvons obtenir l'équation d'évolution de la masse,

$$\frac{m_N(t)}{210 m_n} = \frac{m_{N_0}}{210 m_n} \exp(-\lambda t)$$

(où m_{N_0} est la masse initiale quand il y a N_0 atomes de Polonium) ce qui donne, en simplifiant,

$$m_N(t) = m_{N_0} \exp(-\lambda t)$$

En utilisant maintenant la relation du cours - que nous avons redémontrée en TD -

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

nous pouvons décrire l'évolution de la masse en fonction des paramètres du problème donnés dans l'énoncé,

$$\boxed{m_N(t) = m_{N_0} \exp\left(-\frac{(\ln 2)\, t}{T}\right)}$$

L'application numérique donne une masse

$$m_N(414\,\text{jours}) = 20\,\text{g} \times \exp(-\frac{\ln 2 \times 414\,\text{jours}}{138\,\text{jours}}) = 20\,\text{g} \times \exp(-\frac{\ln 2 \times 414}{138}) = 2,5\,\text{g}$$

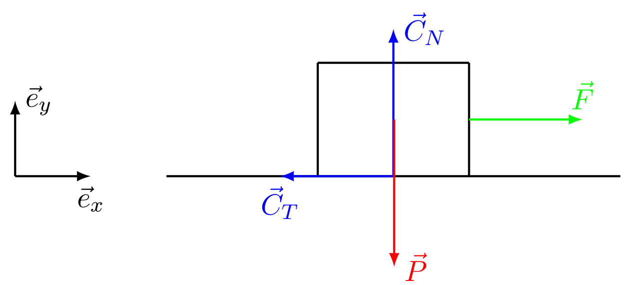
ainsi qu'un nombre d'atomes

$$N(414\,\text{jours}) = \frac{2,5\,\text{g}}{210 \times 1\text{Da}} = \frac{2,5\,\text{g}}{210 \times 0,166 \times 10^{-23}\,\text{g}} = 7,2 \times 10^{21}\,\text{atomes}$$

où l'on a fait l'approximation, comme nous l'avions déjà fait en TD $m_n \simeq 1$ Da. En conclusion, au bout de 414 jours, en partant d'une masse initiale de polonium de 20 g, **il en reste une masse de 2,5 g** ce qui correspond à **un nombre de** $7,2 \times 10^{21}$ atomes.

2 Exercice 4C-2

Commençons par faire un schéma de la situation



Nous étudions le système { brique de masse m = 1 kg } dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le bilan des forces extérieures appliquées sur la brique est

$$\begin{cases} \text{Le poids } \vec{P} = m\vec{g} \\ \text{La force de contact } \vec{C} = \vec{C}_N + \vec{C}_T \\ \text{La force de traction que l'on exerce } \vec{F} \end{cases}$$

L'idée est d'utiliser, dans cet exercic, la loi de Coulomb qui nous dit que si la brique est au repos alors $\|\vec{C}_T\| < \mu_s \|\vec{C}_N\|$ et si elle est en mouvement $\|\vec{C}_T\| = \mu_d \|\vec{C}_N\|$. Le premier objectif est de trouver la force de traction $\|\vec{F}\|$ maximale que l'on peut exercer sans qu'il y ait mouvement pour la comparer à la valeur de 5 N donnée dans l'énoncé. Pour cela, comme la seule donnée connue (en plus des coefficients de friction) est la masse de la brique il va nous falloir trouver des relations entre $\|\vec{C}_T\|, \|\vec{C}_N\|$ et $\|\vec{F}\|$, $\|\vec{P}\|$.

On suppose dans un premier temps que l'on ne tire pas assez fort et que la masse est immobile, au repos. On peut donc appliquer la première loi de Newton au système

$$\vec{P} + \vec{C}_N + \vec{C}_T + \vec{F} = \vec{0}\,.$$

En projetant selon $\vec{e}_x$ puis $\vec{e}_y$ nous obtenons

$$\begin{cases} \text{selon } \vec{e}_x : \|\vec{C}_T\| = \|\vec{F}\| \\ \text{selon } \vec{e}_y : \|\vec{C}_N\| = \|\vec{P}\| = mg \end{cases}$$

Ainsi en remplaçant dans la loi de Coulomb (pour que l'hypothèse d'immobilité soit satisfaite) la norme de la traction $\|\vec{F}\|$ doit vérifier

$$\boxed{\|\vec{F}\| < \mu_s mg}$$

En conclusion, si $5N < \mu_s mg$ la brique est au repos et si $5N > \mu_s mg$ elle se déplace.

On suppose dans un second temps que l'on tire assez fort et que la masse est en mouvement. L'énoncé nous demande de calculer alors avec quelle accélération se fait ce mouvement. Pour cela nous utilisons la deuxième loi de Newton,

$$\vec{P} + \vec{C}_N + \vec{C}_T + \vec{F} = m\vec{a}\,.$$

Comme le mouvement ne peut se faire que selon $\vec{e}_x$ et pas selon $\vec{e}_y$ nous avons $\vec{a} = a_x\vec{e}_x$. Notons que cela implique en particulier que

$$\|\vec{a}\| = a_x$$

En projetant maintenant selon $\vec{e}_x$ puis $\vec{e}_y$ nous obtenons

$$\begin{cases} \text{selon } \vec{e}_x : \ -\|\vec{C}_T\| + \|\vec{F}\| = ma_x\vec{e}_x.\vec{e}_x = ma_x = m\|\vec{a}\| \\ \text{selon } \vec{e}_y : \ \|\vec{C}_N\| - \|\vec{P}\| = ma_x\vec{e}_x.\vec{e}_y = 0 \end{cases}$$

Ainsi la première équation donne

$$\|\vec{a}\| = \frac{1}{m}\left(\|\vec{F}\| - \|\vec{C}_T\|\right)$$

Ne connaissant pas $\|\vec{C}_T\|$ utilisons la loi de Coulomb dans le cas ou il y a mouvement ainsi que la deuxième équation donnant $\|\vec{C}_N\| = \|\vec{P}\| = mg$ pour obtenir

$$\|\vec{C}_T\| = \mu_d\|\vec{C}_N\| = \mu_d mg$$

Il vient alors pour l'accélération

$$\boxed{\|\vec{a}\| = \frac{1}{m}\left(\|\vec{F}\| - \mu_d mg\right)}$$

Passons maintenant aux applications numériques :

1. $\mu_s mg$ = 0,8 × 1 kg × 9,81 ms^{-2} = 7,84 N > 5 N : la brique reste immobile

2. $\mu_s mg$ = 0,3 × 1 kg × 9,81 ms^{-2} = 2,89 N < 5 N : la brique bouge avec une accélération $\|\vec{a}\|$ = (5 N - 0,2 × 1 kg × 9,84 ms^{-2})/1 kg = 3,04 ms^{-2}

3 4D-5 : Energie éolienne, conversion en électricité.

1. Les éoliennes utilisent l'énergie fournie par le vent pour fonctionner. Le vent est un déplacement de l'air dû à des variations de température et pression dans l'atmosphère. Ces variations sont alimentées par l'énergie du soleil. Ainsi à l'origine l'énergie récupérée par les éolienne est de l'énergie solaire.

2. Dans l'énoncé on nous donne l'énergie consommée par an en France. Ceci équivaut donc à une puissance (énergie par unité de temps) que l'on peut exprimer en Watts (W). Remarquons que cette puissance est notée E dans l'énoncé, pour éviter toutes les confusions entre énergie et puissance on la notera ici $P_{\text{conso.}}$ En sachant que 1 an = $3600 \times 24 \times 365,25$ s, la conversion est la suivante

$$P_{\text{conso.}} = 1,8 \times 10^{18}\frac{\text{J}}{1\,\text{an}} = 1,8 \times 10^{18}\frac{\text{J}}{3600 \times 24 \times 365,25\,\text{s}} = \frac{1,8 \times 10^{18}}{3600 \times 24 \times 365,25}\,\text{J.s}^{-1} = 5,7 \times 10^7\,\text{kW}$$

Une éolienne produit une puissance $P_{\text{eol.}} \simeq 200$ kW. Pour satisfaire toute la demande en énergie en utilisant seulement des éoliennes de ce type il faudrait qu'il y en ait

$$\boxed{N_{\text{eol.}} = \frac{P_{\text{conso.}}}{P_{\text{eol.}}} = \frac{5,7 \times 10^7\,\text{kW}}{200\,\text{kW}} \simeq 3 \times 10^5}$$

3. Supposons que l'on alloue une surface carrée S_{eol} identique à chacune de ces $N_{\text{eol.}}$ éoliennes uniformément réparties sur tout le territoire qui a une surface $S_{\text{terr.}} = 5,49 \times 10^5$ km^2. Ainsi nous aurions

$$S_{\text{eol}} = \frac{S_{\text{terr.}}}{N_{\text{eol}}} = \frac{5,49 \times 10^5\,\text{km}^2}{3 \times 10^5} \simeq 2\,\text{km}^2$$

Maintenant, si chacune des éoliennes est placée au centre de cette surface carrée qui lui est allouée, la distance entre deux éoliennes est égale à la longueur, notée ℓ_{eol}, des côtés du carré. Or on sait que $S_{\text{eol}} = \ell_{\text{eol}}^2$ pour un carré donc il vient

$$\ell_{\text{eol}} = \sqrt{S_{\text{eol}}} = \sqrt{2\,\text{km}^2} = 1,4\,\text{km}\,.$$

Ainsi si elles étaient aussi nombreuses et réparties sur tous le territoire **la distance moyenne entre deux éoliennes serait de 1,4 km**.