Licence 1 - Physique générale

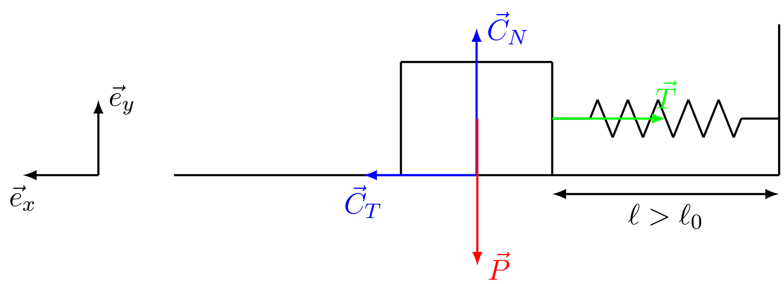
HLPH101 Gr. C2

Correction des exercices de vacances

1 Exercice 1.9 (**)

Nous étudions le système {caisse de masse M} dans le référentiel terrestre supposé Galiléen.

1. Représenter sur un schema les forces qui s'exercent sur la caisse.



Bilan des forces extérieures agissant sur le système :

$$\begin{cases} \text{Le poids } \vec{P} = M\vec{g} \\ \text{La force de contact } \vec{C} = \vec{C}_N + \vec{C}_T \\ \text{La force de rappel du ressort } \vec{T} \end{cases}$$

2. Comment s'exprime l'intensité de la force de rappel exercée par le ressort sur la caisse en fonction des paramètres du problème ?

La force de rappel du ressort s'exprime

$$\boxed{\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x} \tag{1}$$

(car nous avons choisi le vecteur $\vec{e}_x$ dans le sens d'élongation du ressort).

3. Déterminer les normes des composantes normale et tangentielle de la réaction du plan sur la caisse en fonction des paramètres M, k, ℓ, ℓ_0, g.

Le système est supposé à l'équilibre, nous pouvons donc appliquer la première loi de Newton (ou principe fondamental de la statique) et écrire

$$\vec{P} + \vec{C}_N + \vec{C}_T + \vec{T} = \vec{0}$$

ou encore, en détaillant l'expression des forces,

$$M\vec{g} + \vec{C}_N + \vec{C}_T - k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x = \vec{0}\,.$$

En projetant cette équation selon $\vec{e}_x$ et en utilisant $\vec{C}_T.\vec{e}_x = C_T$, $\vec{g}.\vec{e}_x = 0$ et $\vec{C}_N.\vec{e}_x = 0$ nous obtenons,

$$C_T - k(\ell - \ell_0) = 0 \quad \text{ce qui donne} \quad C_T = k(\ell - \ell_0)\,.$$

En projetant maintenant selon $\vec{e}_y$ et en utilisant $\vec{C}_T.\vec{e}_y = 0$, $\vec{g}.\vec{e}_y = -g$ et $\vec{C}_N.\vec{e}_y = C_N$ nous avons

$$C_N - Mg = 0 \quad \text{ce qui donne} \quad C_N = Mg\,.$$

En conclusion nous avons déterminé les composantes normale et tangentielle de la force de contact

$$\boxed{\begin{array}{l} C_T = k(\ell - \ell_0) \\ C_N = Mg \end{array}}$$

4. Déterminez la valeur maximale que peut avoir la longueur ℓ pour que l'équilibre soit possible.

Afin que l'équilibre soit maintenu il est nécessaire que la loi de Coulomb de non glissement soit satisfaite : $C_T < \mu_s C_N$. Ceci implique, avec les expressions trouvées en question précédente

$$k(\ell - \ell_0) < \mu_s Mg\,.$$

En arrangeant les termes nous obtenons alors la condition sur ℓ pour que l'équilibre soit maintenu

$$\boxed{\ell < \frac{\mu_s Mg}{k} + \ell_0}$$

2 Exercice 1.14 (*)

La masse volumique de l'alcool étant plus faible que celle de l'eau on sait que plus il y a d'alcool moins les glaçons sont susceptibles de flotter. Ainsi si les glaçons coulent cela signifie que le pourcentage d'alcool (ou degré alcoolique) x dans la boisson est au moins égal à une certaine valeur notée x_{min} que nous pouvons calculer avec les données du problème. Pour cela nous étudions le système {glaçon} dans le référentiel terrestre supposé galiléen une fois que celui ci a fini de couler et se trouve au fond du verre.

Note : Pour résoudre l'exercice il nous faut la définition précise du degré alcoolique x. Une rapide recherche sur wikipédia nous indique que : "le degré alcoolique [...] est le rapport entre le volume d'alcool (éthanol) contenu dans le mélange et le volume total de ce mélange". De fait si on suppose que le whisky est un mélange composé exclusivement d'alcool et d'eau et que l'on note $V_{\text{alc.}}$ le volume d'alcool et V_{eau} le volume d'eau,

$$x = \frac{V_{\text{alc.}}}{V_{\text{alc.}} + V_{\text{eau}}}$$

Or pour résoudre à son terme l'exercice il nous faut pouvoir exprimer la masse volumique du whisky, notée ρ_W en fonction de x et des masses volumiques données dans l'énoncée. Par définition, la masse volumique du whisky étant le rapport de la masse totale du whisky sur son volume total il vient,

$$\rho_W = \frac{\rho_{\text{eau}} V_{\text{eau}} + \rho_{\text{alc.}} V_{\text{alc.}}}{V_{\text{eau}} + V_{\text{alc.}}}\,.$$

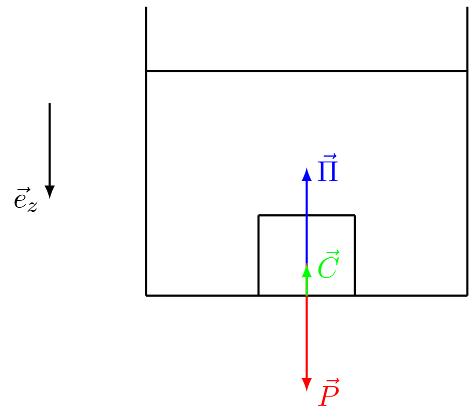
Il est alors possible de faire apparaitre x dans cette équation puisque

$$\begin{aligned} \rho_W &= \rho_{\text{alc.}} \frac{V_{\text{alc.}}}{V_{\text{alc.}} + V_{\text{eau}}} + \rho_{\text{eau}} \frac{V_{\text{eau.}}}{V_{\text{alc.}} + V_{\text{eau}}} \\ \rho_W &= x\rho_{\text{alc.}} + \rho_{\text{eau}} \frac{V_{\text{eau.}} + V_{\text{alc.}} - V_{\text{alc.}}}{V_{\text{alc.}} + V_{\text{eau}}} \\ \rho_W &= x\rho_{\text{alc.}} + \rho_{\text{eau}} \left(1 - \frac{V_{\text{alc.}}}{V_{\text{alc.}} + V_{\text{eau}}}\right)\,. \end{aligned}$$

Ainsi nous avons montré

$$\boxed{\rho_W = x\rho_{\text{alc.}} + (1 - x)\,\rho_{\text{eau}}}$$

Commençons par faire un schéma du problème



Le bilan des forces extérieures sur le glaçon est :

$$\begin{cases} \text{Le poids } \vec{P} = \rho_g V_g \vec{g} \\ \text{La poussée d'Archimède } \vec{\Pi} = -\rho_W V_g \vec{g} \\ \text{La réaction de contact du fond du verre } \vec{C} \end{cases}$$

Le système étant alors à l'équilibre nous pouvons lui appliquer la première loi de Newton (ou principe fondamental de la statique) pour obtenir

$$\rho_g V_g \vec{g} - \rho_W V_g \vec{g} + \vec{C} = \vec{0}$$

En projetant cette équation selon $\vec{e}_z$ nous obtenons

$$(\rho_g - \rho_W) V_g g - C = 0 \quad \text{d'où} \quad (\rho_g - \rho_W) V_g g = C \,.$$

Maintenant utilisons le fait que, le glaçon ayant tendance à couler, la réaction du fond du verre doit être de norme strictement positive, i.e. $C > 0$. Ainsi ceci implique

$$\rho_W < \rho_g \,.$$

Il ne reste maintenant qu'à exprimer $\rho_W = x\rho_{\text{alc.}} + (1-x)\rho_{\text{eau}}$ et résoudre l'inégalité sur x,

$$x\rho_{\text{alc.}} + (1-x)\rho_{\text{eau}} < \rho_g \,.$$

En réarrangeant les termes il vient,

$$x(\rho_{\text{alc.}} - \rho_{\text{eau}}) < \rho_g - \rho_{\text{eau}} \quad \text{i.e.} \quad x(\rho_{\text{eau}} - \rho_{\text{alc.}}) > \rho_{\text{eau}} - \rho_g$$

(où l'on a mutliplié par -1 des deux côtés de l'inégalité dans la dernière étape, ce qui a pour effet d'en inverser le sens) puis en divisant maintenant des deux cotés par $\rho_{\text{eau}} - \rho_{\text{alc.}} > 0$ nous obtenons

$$\boxed{x > x_{\text{min}} = \frac{\rho_{\text{eau}} - \rho_g}{\rho_{\text{eau}} - \rho_{\text{alc.}}}} \,.$$

L'application numérique donne

$$\boxed{x > 0,415 = 41,5\%}$$

3 Exercice 2.9 (*)

1. La loi d'Ohm nous dit : $U = RI$. Comment s'écrit la valeur de la résistance R ?

En premier lieu nous pouvons calculer la valeur de R en utilisant

$$R = \frac{U}{I}$$

puis ensuite l'incertitude absolue sur cette valeur ΔR avec la formule de propagation des incertitudes

$$\Delta R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial I}\Delta I\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial U}\Delta U\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{U}{I^2}\Delta I\right)^2 + \left(\frac{1}{I}\Delta U\right)^2}.$$

L'application numérique nous donne

$$R = \frac{1,02\,\mathrm{V}}{2,10\,\mathrm{A}} = 0,4857\,\Omega \quad \text{et} \quad \Delta R = 0,0066\Omega$$

(notons que $1\ \Omega = 1\ \mathrm{V}\ \mathrm{A}^{-1}$) ce qui se traduit par

$$\boxed{R = 0,486 \pm 0,007\,\Omega}$$

2. Comment s'écrit la puissance $P = UI$ dissipée dans la résistance ?

Nous avons déjà l'expression de P, il suffit de connaitre l'expression de l'incertitude absolue sur sa mesure. En utilisant encore une fois la formule de propagation des incertitudes,

$$\Delta P = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial U}\Delta U\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial I}\Delta I\right)^2} = \sqrt{(I\Delta U)^2 + (U\Delta I)^2}.$$

L'application numérique nous donne

$$P = 1,02\,\mathrm{V} \times 2,10\,\mathrm{A} = 2,142\,\mathrm{W} \quad \text{et} \quad \Delta P = 0,029\,\mathrm{W}$$

(notons que $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{V} \times \mathrm{A}$) ce qui se traduit par

$$\boxed{P = 2,14 \pm 0,03\,\mathrm{W}}$$

3. L'étudiante décide de calculer la puissance P et son incertitude à partir de la formule $P = RI^2$. Elle obtient une incertitude relative de 4%. Ce résultat est-il est accord avec le résultat précédent ? Pourquoi ?

Si l'on calcule l'incertitude relative que nous avons trouvé sur P avec nos calculs de la question 2. :

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{0,03}{2,14} = 0,014 = 1,4\% < 4\%$$

Ainsi l'incertitude relative que nous avons trouvée est plus faible que cette de l'étudiante, **son résultat n'est pas accord avec le notre**. Le résultat de 4% est faux car en calculant l'incertitude sur P en utilisant $P = RI^2$ l'étudiante a utilisé la formule de propagation des incertitudes sur deux variables (R et I) **qui ne sont pas indépendantes** - puisque R est calculé en utilisant I (c.f. question 1.). Son calcul est incorrect.

4 Exercice 2.11 (**)

1. Déterminer l'incertitude Δf en fonction de p, q et des incertitudes Δp et Δq.

La formule de propagation des incertitudes donne l'incertitude absolue sur f comme

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial p}\Delta p\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial q}\Delta q\right)^2},$$

il faut donc évaluer les dérivées partielles de f par rapport à p et q. Les formules usuelles de dérivation nous permettent de calculer

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial p} &= \frac{q(p+q)-pq}{(p+q)^2} = \frac{q^2}{(p+q)^2}\\ \frac{\partial f}{\partial q} &= \frac{p(p+q)-pq}{(p+q)^2} = \frac{p^2}{(p+q)^2}.\end{aligned}$$

Ainsi il vient la formule

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{q^2}{(p+q)^2}\Delta p\right)^2 + \left(\frac{p^2}{(p+q)^2}\Delta q\right)^2}$$

qui peut être simplifiée pour donner

$$\boxed{\Delta f = \frac{1}{(p+q)^2}\sqrt{(q^2\Delta p)^2 + (p^2\Delta q)^2}}. \tag{2}$$

2. Un expérimentateur mesure $p = 30$ cm et $q = 66$ cm. Sachant que les incertitudes relatives sur les mesures de positions se font à 10% près, que vaut la distance focale de la lentille ?

Le fait que les incertitudes relatives sur les mesures est de 10% nous indique que

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta q}{q} = 10\% = 0.10$$

où Δp et Δq représentent les incertitudes absolues sur p et q respectivement. En utilisant les valeurs numériques données,

$$\begin{aligned}\Delta p &= 0.10p = 0.10 \times 30\,\text{cm} = 3,0\,\text{cm}\\ \Delta q &= 0.10q = 0.10 \times 66\,\text{cm} = 6,6\,\text{cm}\end{aligned}$$

et en utilisant ces valeurs dans Eq. (2), ceci nous permet d'obtenir,

$$\Delta f = \frac{1}{(30+66)^2\ \text{cm}^2}\sqrt{((66\,\text{cm})^2 \times 3,0\,\text{cm})^2 + ((30\,\text{cm})^2 \times 6,6\,\text{cm})^2} = 1,6\,\text{cm}$$

De plus, le calcul de la valeur numérique de la distance focale f donne

$$f = \frac{33\,\text{cm} \times 66\,\text{cm}}{(30+66)\ \text{cm}} = 20,625\,\text{cm}.$$

Ainsi le résultat final est

$$\boxed{f = 20,6 \pm 1,6\,\text{cm}}.$$